**数学学习方法及其指导**

　　杨骞

　　近几年来，旨在教会学生会学习、提高学生自学能力的学法指导的研究和实践已是基础教育改革的一个热门课题。这一课题的提出和研究，不仅对当前提高基础教育质量、实施素质教育具有现实意义，而且对培养未来社会发展所需要的人才、促进科教兴国具有历史意义。

　　随着社会、经济、科技的高速发展，数学的应用越来越广，地位越来越高，作用越来越大。不仅如此，数学教育的实践和历史还表明，数学作为一种文化，对人的全面素质的提高具有巨大的影响。因此，提高基础教育中的数学教学质量，就显得尤为重要。可目前由于受“应试教育”的影响，数学教学中违背教育规律的现象和做法时有发生，为此更新数学教学思想、完善数学教学方法就显得更加迫切。在数学教学中，开展学法指导，正是改革数学教学的一个突破口。

　　一

　　对数学教学如何实施数学学习方法的指导，人们进行了许多有益的探索和实验。首先是通过观察、调查，归纳总结了中学生数学学习中存在的问题，如“学习懒散，不肯动脑；不订计划，惯性运转；忽视预习，坐等上课；不会听课，事倍功半；死记硬背，机械模仿；不懂不问，一知半解；不重基础，好高骛远；赶做作业，不会自学；不重总结，轻视复习”［１］等等。针对这些问题，提出了相应的数学学法指导的途径和方法，如数学全程渗透式（将学法指导渗透于制订计划、课前预习、课堂学习、课后复习、独立作业、学习总结、课外学习等各个学习环节之中）［２］；建立数学学习常规（课堂常规———情境美，参与高，求卓越，求效率；课后常规———认真读书，整理笔记，深思熟虑，勇于质疑；作业常规———先复习，后作业，字迹清楚，表述规范，计算正确，填好《作业检测表》，重做错题）［３］等等。诚然，这对于端正学习态度、养成学习习惯、提高学业成绩、优化学习品质，采劝对症下药”的策略，开展对学习常规的指导，无疑会收到较好的效果。但是，数学学习方法的指导，决不能忽视数学所特有的学习方法的指导。可以说，这才是数学学法指导之内核和要害。也就是说，数学学法指导应该着重指导学生学会理解数学知识、学会解决数学问题、学会数学地思维、学会数学交流、学会用数学解决实际问题等。有鉴于此，笔者主要从“数学”、“数学学习”出发，来阐释数学学习方法，论述数学学法指导。

　　二

　　从数学的角度出发，就是要考察数学的特点。关于数学的特点，虽仍有争议，但传统或者说比较科学的提法仍是３条：高度的抽象性、逻辑的严谨性和应用的广泛性。

　　１．数学研究的对象本来是现实的，但由于数学仅从空间形式与数量关系方面来反映客观现实，所以数学是逐级抽象的产物。比如三角形形状的实物模型随处可见，多种多样，名目繁多，但数学中的“三角形”却是一种抽象的思维形式（概念），撇开了人们常见的各种三角形形状实物的诸多性质（如天然属性、物理性质等）。因此，学习数学首当其冲的是要学习抽象。而抽象又离不开概括，也离不开比较和分类，可以说比较、分类、概括是抽象的基础和前提。比如，要从已经过抽象得出的物体运动速度ｖ＝ｖ０＋ａｔ、产品的成本ｍ＝ｍ０＋ａｔ、金属加热引起的长度变化ｌ＝ｌ０＋ａｔ中再次抽象出一次函数ｆ（ｘ）＝ａｘ＋ｂ，显然要经过比较（它们的异同）和概括（它们的共同特征）。根据数学高度抽象性的特点，数学学法指导要强调比较、分类、概括、抽象等思维方法的指导。

　　２．数学结论的可靠性有其严格的要求，观察和实验不能作为论证的依据和方法，而是要经过逻辑推理（表现为证明或计算），方能得以承认。比如，“三角形内角和为１８０°”这个结论，通过测量的方法是不能确立的，唯有在欧氏几何体系中经过数学证明才能肯定其正确性（确定性）。在数学中，只有通过逻辑证明和符合逻辑的计算而得到的结论，才是可靠的。事实上，任何数学研究都离不开证明和计算，证明和计算是极其主要的数学活动，而通常所说的“数学思想方法往往是数学中证明和计算的方法。探求数学问题的解法也就是寻找相应的证明或计算的具体方法。从这一点上来说，证明或计算是任何一种数学思想方法的组成部分，又是任何一种数学思想方法的目标和表述形式”［４］。又由于证明和计算主要依靠的是归纳与演绎、分析与综合，所以根据数学逻辑的严谨性特点，数学学法指导要重视归纳法、演绎法、分析法、综合法的指导。#p#分页标题#e#

　　３．由于任何客观对象都有其空间形式和数量关系，因而从理论上说以空间形式与数量关系为研究对象的数学可以应用于客观世界的一切领域，即可谓宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之繁，无处不用数学。应用数学解决问题，不但首先要提出问题，并用明确的语言加以表述，而且要建立数学模型，还要对数学模型进行数学推导和论证，对数学结果进行检验和评价。也就是说，数学之应用，它不仅表现为一种工具，一种语言，而且是一种方法，是一种思维模式。根据数学应用的广泛性特点，数学学法指导还要指导学生建立和操作数学模型，以及进行检验和评价。

　　三

　　从数学学习的角度出发，就是要通过对数学学习过程的考察，引申出数学学法指导的内容和策略。关于数学学习的过程，比较新颖的观点是：“在原有行为结构与认知结构的基础上，或是将环境对象纳入其间（同化），或是因环境作用而引起原有结构的改变（顺应），于是形成新的行为结构与认知结构，如此不断往复，直到达成相对的适应性平衡”［５］。通过对这一认识的分析和理解，就数学学法指导而言，可概括出以下３点：

　　１．行为结构既是学习新知的目的和结果，又是学习新知的基础，因而在数学教学中亦需注重外部行为结构形成的指导。由于这种外部行为主要包括外部实物操作和外部符号（主要是语言）活动，所以在数学学法指导中，一要重视学具的操作（可要求学生尽可能多地制作学具，操作学具）；二要重视学生的言语表达（给学生尽可能多地提供言语交流的机会，可以是教师与学生间的交流，也可以是学生与学生之间的交流）。

　　２．认知结构同样既是学习新知的目的和结果，也是学习新知的基础，故而数学教学要加强数学认知结构形成的指导。所谓数学认知结构，是指学生头脑中的知识结构按自己的理解深度、广度，结合自己的感觉、知觉、记忆、思维等认知特点，组合成的一个具有内部规律的整体结构。因此，对于学生形成数学认知结构的指导，关键在于不断地提高所呈现的数学知识和经验的结构化程度。在数学学法指导中，须注意如下几点：①加强数学知识间联系的教学。无论是新知识的引入和理解，还是巩固和应用，尤其是知识的复习和整理，都要从知识间的联系出发。②重视数学思想的挖掘和渗透。由于数学思想是对数学的本质的认识，因而数学思想是数学知识结构建立的基矗常见的数学思想有：符号思想、对应思想、数形结合思想、归纳思想、公理化思想、模型化思想等等。③注重数学方法的明晰教学。数学方法作为解决问题的手段，是建立数学知识结构的桥梁。常见的数学方法有：化归法、构造法、参数法、变换法、换元法、配方法、反证法、数学归纳法等。

　　３．在原有行为结构与认知结构的基础上，无论是通过同化，还是通过顺应来获得新知，必须是在一种学习机制的作用下方能实现。而这种学习机

　　制主要就是对学习新知过程的监控和调节，即所谓的元学习。实质上，能否会学，关键就在于这种学习是否建立起来。于是，元学习的指导又成为数学方法指导的重要内容。为此，在数学学法指导中，需要注意：①要传授程序性知识和情境性知识。程序性知识即是对数学活动方式的概括，如遇到一个数学证明题该先干什么，后干什么，再干什么，就是所谓的程序性知识。情境性知识即是对具体数学理论或技能的应用背景和条件的概括，如掌握换元法的具体步骤，获得换元技能，懂得在什么条件下应用换元法更有效，就是一种情境性知识。②尽可能让学生了解影响数学学习（数学认知）的各种因素。比如，学习材料的呈现方式是文字的、字母的，还是图形的；学习任务是计算、证明，还是解决问题，等等。这些学习材料和学习任务方面的因素，都对数学学习产生影响。③要充分揭示数学思维的过程。比如，揭示知识的形成过程、思路的产生过程、尝试探索过程和偏差纠正过程。④帮助学生进行自我诊断，明确其自身数学学习的特征。比如：有的学生擅长代数，而认知几何较差；有的学生记忆力较强而理解力较弱；还有的学生口头表达不如书面表达等。⑤指导学生对学习活动进行评价。如评价问题理解的正确性、学习计划的可行性、解题程序的简捷性、解题方法的有效性等诸多方面。⑥帮助学生形成自我监控的意识。如监控认知方向意识、认知过程意识和调节认知策略意识等等。#p#分页标题#e#

　　四

　　根据数学内容的性质，数学教学一般可分为概念教学、命题（主要有定理、公式、法则、性质）教学、例题教学、习题教学、总结与复习等５类。相应地，数学学法指导的实施亦需分别落实到这５类教学之中。这里仅就例题教学中如何实施数学学法指导谈谈自己的认识。

　　１．根据学生的学情安排例题。如前所述，学习新知必须建立在已有的基础之上，从内容上讲，这个基础既包括知识基础，又包括认知水平和认知能力，还包括学习兴趣、认知意识，乃至学习态度等有关学习动力系统方面的准备。因此，无论是选配例题，还是安排例题，都要考虑到学生的学习情况，尤其是要考虑激发学生认知兴趣和认知需求的原则（称之为动机原则）。在例题选配和安排中，可采取增、删、调的策略，力求既突出重点，又符合学生的学情。所谓增，即根据学生的认知缺陷增补铺垫性例题，或者为突破某个难点增加过渡性例题。所谓删，即根据学生情况，删去比较简单的例题或要求过高的难题。所谓调，即根据学生的实际水平，将后面的例题调至前面先教，或者将前面的例题调到后面后教。

　　２．根据学习目标和任务精选例题。例题的作用是多方面的，最基本的莫过于理解知识，应用知识，巩固知识；莫过于训练数学技能，培养数学能力，发展数学观念。为发挥例题的这些基本作用，就要根据学习目标和任务选配例题。具体的策略是：增、删、并。这里的增，即为突出某个知识点、某项数学技能、某种数学能力等重点内容而增补强化性例题，或者根据联系社会发展的需要，增加补充性例题。这里的删，即指删去那些作用不大或者过时的例题。所谓并，即为突出某项内容把单元内前后的几个例题合并为一个例题，或者为突出知识间的联系打破单元界限而把不同内容的例题综合在一起。

　　３．根据解题的心理过程设计例题教学程序。按照波利亚的解题理论，一般把解题过程分为弄清问题、拟定计划、实现计划、回顾等４个阶段。这是针对解题过程本身而言的。但就解题教学来说，还应当增加一个步骤，也是首要环节，即要使学生“进入问题情境”，让学生产生一种认知的需要。对于“进入问题情境”环节，要求教师用简短的语言，在承上启下中，提出学习目标，明确学习任务，激起认知冲突。而对其余４个环节，教师的行为可按波利亚的“怎样解题表”中的要求去构思。一般教师和学生都能够注意做到做好前３个环节，却容易忽视“回顾”环节。

　　严格说来，回顾环节对解题能力的提高，对例题教学目的的实现起着不可替代的作用。对回顾环节来讲，除波利亚提出的几条以外，更为主要的是对解题方法的概括和反思，并使其能迁移到其它问题的解决之中。

　　４．根据数学方法指导的目的和内容适度调整例题。通常，人们根据问题的条件（Ａ）、解决的过程（Ｂ）及问题的结论（Ｃ）的情况把数学题划分为标准题和非标准题两大类：如果条件和结论都明确，学生也熟知解题过程（即Ａ、Ｂ、Ｃ三要素全已知），这种题为标准题（记为ＡＢＣ）；Ａ、Ｂ、Ｃ三要素中缺少一个或两个要素的题则为非标准题。如果分别用Ｘ、Ｙ、Ｚ表示对应于Ａ、Ｂ、Ｃ的未知成分，则非标准题的题型（计６种）可表示为：ＡＢＺ，ＡＹＣ，ＸＢＣ，ＡＹＺ，ＸＢＺ，ＸＹＣ。数学教材中的例题大多数是ＡＢＣ型和ＡＢＺ型，有部分的ＡＹＣ型和极少数的ＡＹＺ型。由于数学学法指导的一项重要任务是教学生会抽象、概括、归纳、演绎，会数学地思考和交流，会分析问题和解决问题，因而例题教学要特别注重教材中缺少的几种类型题的教学。其中最为重要的是“开放性题”（ＡＢＺ型和ＡＹＺ型例题中，Ｚ不唯一）和“数学问题解决”中所指出的“数学应用题”（ＡＹＣ型及ＡＹＺ型中所涉及的主题是数学以外的内容）。对于“开放性题”，由于它的结论不唯一，对培养学生数学思维有着至关重要的作用。对于“数学应用题”，则由于它的解决要用数学模型法，因而对培养学生运用分析问题和解决问题的方法是十分重要的。从数学学法指导的角度来说，适度调整例题很有必要。调整的策略有二：一是改，即将已有的题型变换为别的题型；二是增，即增加与知识点有关的“开放性题”和“数学应用题”。#p#分页标题#e#

　　５．注重对例题的全方位反思。例题的作用是多方面的，除上文提到的几点外，例题教学还具有传授新知识，积累数学经验，完善数学认知结构